Autour des Triangles Cassés *

Martin C. Cooper[1] **Achref El Mouelhi**[2] **Cyril Terrioux**[2] **Bruno Zanuttini**[3]
[1] IRIT, Université de Toulouse III, 31062 Toulouse, France
[2] LSIS, Aix-Marseille Université, 13397 Marseille, France
[3] GREYC, Normandie Université, 14032 Caen, France
cooper@irit.fr {achref.elmouelhi, cyril.terrioux}@lsis.org
bruno.zanuttini@unicaen.fr

Résumé

Une instance CSP binaire qui satisfait la propriété des triangles cassés (BTP) peut être résolue en temps polynomial. Malheureusement, en pratique, peu d'instances satisfont cette propriété. Nous montrons qu'une version locale de BTP permet de fusionner des valeurs dans les domaines d'instances binaires quelconques. Des expérimentations démontrent la diminution significative de la taille de l'instance pour certaines classes de problèmes. Ensuite, nous proposons une généralisation de cette fusion à des contraintes d'arité quelconque. Enfin, une version orientée nous permet d'étendre la classe polynomiale BTP.

Ce papier est un résumé de l'article M. C. Cooper, A. El Mouelhi, C. Terrioux et B. Zanuttini. On Broken Triangles In *Proceedings of CP*, *LNCS* 8656, 9–24, 2014.

Abstract

A binary CSP instance satisfying the broken-triangle property (BTP) can be solved in polynomial time. Unfortunately, in practice, few instances satisfy the BTP. We show that a local version of the BTP allows the merging of domain values in arbitrary instances of binary CSP. Experimental trials demonstrate a significant decrease in instance size for certain classes of problems. Then we propose a generalization of this merging to instances with constraints of arbitrary arity. Finally, a directional version allows us to extend the BTP tractable class .

This is a summary of the paper M. C. Cooper, A. El Mouelhi, C. Terrioux et B. Zanuttini. On Broken Triangles In *Proceedings of CP*, *LNCS* 8656, 9–24, 2014.

1 Fusion de valeurs pour les CSP binaires

Nous considérons ici une nouvelle opération de réduction de domaines, qui au lieu d'éliminer des valeurs comme le ferait une opération classique comme la cohérence d'arc ou la substitution de voisinage, fusionne des valeurs issues d'un même domaine d'un CSP binaire. Nous rappelons qu'un *CSP binaire* est défini par un ensemble X de n variables, un domaine $\mathcal{D}(x)$ de valeurs possibles pour chaque variable $x \in X$ et une relation $R_{xy} \subseteq \mathcal{D}(x) \times \mathcal{D}(y)$ pour chaque couple de variables distinctes $x, y \in X$, qui représente l'ensemble des couples (a, b) de valeurs compatibles pour (x, y).

La *fusion* de deux valeurs $a, b \in \mathcal{D}(x)$ d'un CSP binaire consiste à remplacer a et b dans $\mathcal{D}(x)$ par une nouvelle valeur c qui est compatible avec toutes les valeurs des autres variables compatibles avec a ou b. Une *condition de fusion de valeurs* pour les valeurs $a, b \in \mathcal{D}(x)$ d'une instance I est une propriété $P(x, a, b)$ calculable en temps polynomial telle que, si la propriété est vraie, alors l'instance I' obtenue à partir de I en fusionnant $a, b \in \mathcal{D}(x)$ est satisfiable ssi I est satisfiable.

Nous définissons une condition de fusion de valeurs basée sur la propriété BTP [1]. Un *triangle cassé* sur deux valeurs $a, b \in \mathcal{D}(x)$ se définit par un couple de valeurs $d \in \mathcal{D}(y)$, $e \in \mathcal{D}(z)$ de deux variables différentes $y, z \in X \setminus \{x\}$ tel que $(a, d) \notin R_{xy}$, $(b, d) \in R_{xy}$, $(a, e) \in R_{xz}$, $(b, e) \notin R_{xz}$ et $(d, e) \in R_{yz}$ (voir figure 1).

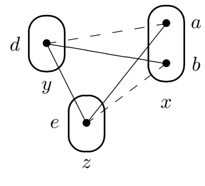

FIGURE 1 – Un triangle cassé sur deux valeurs a, b d'une variable x donnée.

Proposition 1 *L'absence de triangle cassé sur a et b est une condition de fusion de valeurs.*

*Ce travail est soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet TUPLES (ANR-2010-BLAN-0210).

La règle de fusion définie par la proposition 1 généralise la substitution de voisinage [3] et l'interchangeabilité virtuelle [4]. Par ailleurs, en plus de conserver la satisfiabilité, elle permet de reconstruire en temps polynomial toutes les solutions de I à partir des solutions d'une instance I^f obtenue en appliquant à I une suite de fusions. À noter que la reconstruction d'une solution de I à partir d'une solution de I^f peut s'effectuer en temps linéaire.

Des expérimentations menées sur plus de 2 500 instance de la compétition [1] de solvers de 2008 ont montré que pour 10 % des instances, cette règle s'avère très efficace avec au moins 30 % de valeurs fusionnées.

2 Extension aux CSP d'arité quelconque

Nous généralisons maintenant la fusion de valeurs aux CSP d'arité quelconque. Une *instance CSP d'arité quelconque* I est définie par un ensemble X de n variables, un domaine $\mathcal{D}(x)$ de valeurs possibles pour chaque variable $x \in X$ et un ensemble $\text{NoGoods}(I)$ de tuples incompatibles. La *fusion* de deux valeurs $a, b \in \mathcal{D}(x)$ d'un CSP d'arité quelconque consiste à remplacer a et b dans $\mathcal{D}(x)$ par une nouvelle valeur c qui est compatible avec tout tuple compatible avec a ou b. L'ensemble de nogoods de l'instance I' ainsi obtenue est donc défini par :

$$\begin{aligned}\text{NoGoods}(I') = \{&t \in \text{NoGoods}(I) \mid \langle x,a\rangle, \langle x,b\rangle \notin t\} \\ &\cup \{t \cup \{\langle x,c\rangle\} \mid t \cup \{\langle x,a\rangle\} \in \text{NoGoods}(I) \wedge \\ &\quad \exists t' \in \text{NoGoods}(I) \text{ t.q. } t' \subseteq t \cup \{\langle x,b\rangle\}\} \\ &\cup \{t \cup \{\langle x,c\rangle\} \mid t \cup \{\langle x,b\rangle\} \in \text{NoGoods}(I) \wedge \\ &\quad \exists t' \in \text{NoGoods}(I) \text{ t.q. } t' \subseteq t \cup \{\langle x,a\rangle\}\}.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir une condition de fusion de valeurs basée sur une généralisation des triangles cassés. Un *triangle cassé d'arité générale* sur deux valeurs $a, b \in \mathcal{D}(x)$ est défini par un couple de tuples t, u ne contenant pas d'affectation de la variable x et satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\text{Good}(I, t \cup u) \wedge \text{Good}(I, t \cup \{\langle x,a\rangle\}) \wedge \text{Good}(I, u \cup \{\langle x,b\rangle\})$
2. $t \cup \{\langle x,b\rangle\} \in \text{NoGoods}(I) \wedge u \cup \{\langle x,a\rangle\} \in \text{NoGoods}(I)$

où $\text{Good}(I, t)$ est un prédicat qui est vrai ssi t ne contient pas deux affectations différentes d'une même variable et $\nexists t' \subseteq t$ tel que $t' \in \text{NoGoods}(I)$.

Proposition 2 *L'absence de triangle cassé d'arité générale sur a et b est une condition de fusion de valeurs.*

Comme dans le cas binaire, une solution de I peut être calculée en temps linéaire à partir d'une solution d'une instance I^f obtenue en appliquant à I une suite de fusions.

Notons qu'il existe un lien théorique entre la fusion de valeurs ne possèdant pas de triangle cassé d'arité quelconque et la résolution exploitée dans SAT.

1. http://www.cril.univ-artois.fr/CPAI08

3 Une nouvelle classe polynomiale

À l'image de la propriété BTP dans le cas des CSP binaires, nous pouvons considérer la notion de triangle cassé d'arité générale selon un ordre total $<$ sur les variables. Un *triangle cassé directionnel d'arité générale* sur deux valeurs $a, b \in \mathcal{D}(x)$ d'une instance I est un couple de tuples t, u ne contenant pas d'affectation de la variable x et satisfaisant les conditions suivantes :

1. $t^{<x}$ et $u^{<x}$ ne sont pas vides
2. $\text{Good}(I, t^{<x} \cup u^{<x}) \wedge \text{Good}(I, t^{<x} \cup \{\langle x,a\rangle\}) \wedge \text{Good}(I, u^{<x} \cup \{\langle x,b\rangle\})$
3. $\exists t'$ t.q. $Vars(t') = Vars(t) \wedge (t')^{<x} = t^{<x} \wedge t' \cup \{\langle x,a\rangle\} \notin \text{NoGoods}(I)$
4. $\exists u'$ t.q. $Vars(u') = Vars(u) \wedge (u')^{<x} = u^{<x} \wedge u' \cup \{\langle x,b\rangle\} \notin \text{NoGoods}(I)$
5. $t \cup \{\langle x,b\rangle\} \in \text{NoGoods}(I) \wedge u \cup \{\langle x,a\rangle\} \in \text{NoGoods}(I)$

avec $t^{<x}$ le tuple restreint aux variables précédant x dans l'ordre $<$ et $Vars(t)$ l'ensemble des variables sur lesquelles porte t. I satisfait la *propriété des triangles cassés directionnels d'arité quelconque* (DGABTP) selon l'ordre sur les variables $<$ s'il n'existe aucun triangle cassé directionnel sur a, b pour tout couple a, b de n'importe quelle variable x.

Cette propriété permet de définir une nouvelle classe polynomiale quand l'ordre sur les variables est connu.

Théorème 1 *Le problème de satisfiabilité est polynomial pour les instances CSP satisfaisant la propriété DGABTP selon un ordre fourni avec la donnée du problème.*

La reconnaissance de la classe DGABTP requiert donc de déterminer s'il existe un ordre sur les variables selon lequel l'instance CSP considérée satisferait la propriété DGABTP. Si dans le cas des CSP binaires, ce problème peut se résoudre en temps polynomial, il devient malheureusement NP-complet dans les cas des CSP d'arité quelconque.

Enfin, nous pouvons noter que les classes DGABTP et DBTP (pour Dual Broken Triangle Property [2]) sont incomparables.

Références

[1] M. C. Cooper, P. G. Jeavons, et A. Z. Salamon. Generalizing constraint satisfaction on trees : Hybrid tractability and variable elimination. *Artificial Intelligence*, 174(9-10), 570–584, 2010.

[2] A. El Mouelhi, P. Jégou et C. Terrioux. A Hybrid Tractable Class for Non-Binary CSPs. In *ICTAI*, 947–954, 2013.

[3] E. C. Freuder. Eliminating interchangeable values in constraint satisfaction problems. In *AAAI*, 227–233, 1991.

[4] C. Likitvivatanavong et R. H.C. Yap. Eliminating redundancy in CSPs through merging and subsumption of domain values. *ACM SIGAPP Applied Computing Review*, 13(2), 2013.